अध्याय 2

बहुपद

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- **बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ :** किसी बहुपद $p(x)$ के शून्यक परिशुद्ध रूप से उन बिंदुओं के x-निर्देशांक होते हैं, जहाँ $y = p(x)$ का आलेख x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।
- **एक बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध :** यदि α और β एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक हैं, तो $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ और $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ होता है।
- यदि α, β और γ किसी त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हैं,

  तो $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$ और $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$ होता है।
- विभाजन एल्गोरिथ्म कहती है कि एक बहुपद $p(x)$ और एक शून्येतर बहुपद $g(x)$ दिए रहने पर, दो बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे होते हैं कि $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$ हो, जहाँ $r(x) = 0$ या घात $r(x) <$ घात $g(x)$ है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1: यदि द्विघात बहुपद $x^2 + 3x + k$ का एक शून्यक 2 है, तो k का मान है

(A) 10 (B) –10 (C) 5 (D) –5

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के दो शून्यक 0 दिए हैं। तीसरा शून्यक है

(A) $\frac{-b}{a}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{c}{a}$ (D) $-\frac{d}{a}$

हल : उत्तर (A) [**संकेत:** क्योंकि यदि तीसरा शून्यक α है, तो शून्यकों का योग $= \alpha + 0 + 0 = \frac{-b}{a}$ है।]

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित प्रश्नों में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. यदि द्विघात बहुपद $(k-1)x^2 + kx + 1$ के शून्यकों में से एक शून्यक -3 है, तो k का मान है

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{-4}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{-2}{3}$

2. शून्यक -3 और 4 वाला द्विघात बहुपद है

(A) $x^2 - x + 12$ (B) $x^2 + x + 12$

(C) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 6$ (D) $2x^2 + 2x - 24$

3. यदि द्विघात बहुपद $x^2 + (a + 1)x + b$ के शून्यक 2 और -3 हैं, तो

(A) $a = -7, b = -1$ (B) $a = 5, b = -1$

(C) $a = 2, b = -6$ (D) $a = 0, b = -6$

4 . शून्यक -2 और 5 वाले बहुपदों की संख्या है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 3 से अधिक

5. त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ का एक शून्यक 0 दिया हुआ है। अन्य दोनों शून्यकों का गुणनफल है

(A) $-\frac{c}{a}$ (B) $\frac{c}{a}$ (C) 0 (D) $-\frac{b}{a}$

6. यदि त्रिघात बहुपद $x^3 + ax^2 + bx + c$ का एक शून्यक -1 है, तो अन्य दोनों शून्यकों का गुणनफल है

(A) $b - a + 1$ (B) $b - a - 1$ (C) $a - b + 1$ (D) $a - b - 1$

7. द्विघात बहुपद $x^2 + 99x + 127$ के शून्यक हैं

(A) दोनों धनात्मक (B) दोनों ऋणात्मक

(C) एक धनात्मक और एक ऋणात्मक (D) दोनों बराबर

8. द्विघात बहुपद $x^2 + kx + k, k \neq 0$ के शून्यक

(A) दोनों धनात्मक नहीं हो सकते

(B) दोनों ऋणात्मक नहीं हो सकते

(C) सदैव असमान होते हैं

(D) सदैव बराबर होते हैं

9. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c, c \neq 0$ के शून्यक बराबर हैं, तो

(A) c और a विपरीत चिन्हों के हैं

(B) c और b विपरीत चिन्हों के हैं

(C) c और a एक ही चिन्ह के हैं

(D) c और b एक ही चिन्ह के हैं

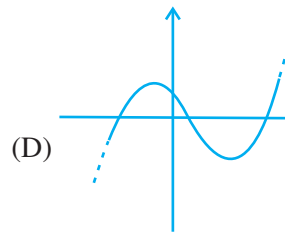
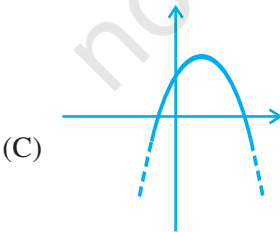
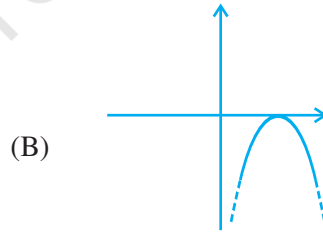
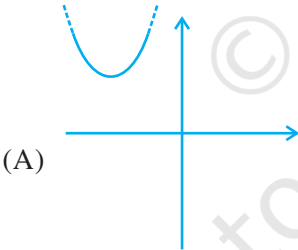
10. यदि $x^2+ax + b$ के रूप के एक द्विघात बहुपद का एक शून्यक दूसरे शून्यक का ऋणात्मक हो, तो

(A) इसमें कोई रैखिक पद नहीं होता तथा अचर पद ऋणात्मक होता है

(B) इसमें कोई रैखिक पद नहीं होता तथा अचर पद धनात्मक होता है

(C) इसका रैखिक पद हो सकता है, परंतु अचर पद ऋणात्मक होता है

(D) इसका रैखिक पद हो सकता है, परंतु अचर पद धनात्मक होता है

11. निम्नलिखित में से कौन एक द्विघात बहुपद का आलेख नहीं है?

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: क्या बहुपद $p(x)$ को $2x + 3$ से भाग देने पर शेषफल $x - 1$ हो सकता है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : नहीं, क्योंकि घात $(x - 1) = 1 =$ घात $(2x + 3)$

प्रतिदर्श प्रश्न 2: क्या निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

यदि एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के दोनों शून्यक ऋणात्मक हैं, तो a, b और c में से प्रत्येक का एक ही चिन्ह होता है।

हल : सत्य, क्योंकि $-\frac{b}{a} =$ शून्यकों का योग < 0, इसलिए $\frac{b}{a} > 0$ है। साथ ही, शून्यकों का गुणनफल

$= \frac{c}{a} > 0$ है।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए और उनका औचित्य दीजिए :

(i) क्या $x^6 + 2x^3 + x - 1$ को x में घात 5 के एक बहुपद से भाग देने पर भागफल $x^2 - 1$ हो सकता है?

(ii) $ax^2 + bx + c$ को $px^3 + qx^2 + rx + s, p \neq 0$ से भाग देने पर भागफल और शेषफल क्या होंगे?

(iii) यदि बहुपद $p(x)$ को बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर भागफल शून्य हो, तो $p(x)$ और $g(x)$ की घातों में क्या संबंध है?

(iv) यदि एक शून्येतर बहुपद $p(x)$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल 0 हो, तो $p(x)$ और $g(x)$ की घातों में क्या संबंध है?

(v) क्या किसी विषम पूर्णांक $k > 1$ के लिए, द्विघात बहुपद $x^2 + kx + k$ के बराबर शून्यक हो सकते हैं?

2. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य? अपने उत्तरों के लिए औचित्य दीजिए।

(i) यदि एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के दोनों शून्यक धनात्मक हैं, तो a, b और c में से सभी का समान चिन्ह होता है।

(ii) यदि एक बहुपद का आलेख x-अक्ष को केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करे, तो यह एक द्विघात बहुपद नहीं हो सकता।

(iii) यदि एक बहुपद का आलेख x-अक्ष को ठीक दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है, तो यह आवश्यक नहीं है कि वह एक द्विघात बहुपद हो।

(iv) यदि एक त्रिघात बहुपद के दो शून्यकों में से प्रत्येक शून्य है, तो इसके रैखिक और अचर पद नहीं हो सकते।

(v) यदि एक त्रिघात बहुपद के सभी शून्यक ऋणात्मक हैं, तो इस बहुपद के सभी गुणांक और अचर पद एक ही चिह्न के होते हैं।

(vi) यदि एक त्रिघात बहुपद $x^3 + ax^2 - bx + c$ के तीनों शून्यक धनात्मक हैं, तो a, b और c में से कम से कम एक अवश्य ही ऋणेतर होगा।

(vii) k का केवल वह मान जिसके लिए द्विघात बहुपद $kx^2 + x + k$ के शून्यक बराबर हैं शून्यक $\frac{1}{2}$ है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: बहुपद $x^2 + \frac{1}{6}x - 2$ के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा इस बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के बीच के संबंधों का सत्यापन कीजिए।

हल : $x^2 + \frac{1}{6}x - 2 = \frac{1}{6}(6x^2 + x - 12) = \frac{1}{6}[6x^2 + 9x - 8x - 12]$

$$= \frac{1}{6}[3x(2x + 3) - 4(2x + 3)] = \frac{1}{6}(3x - 4)(2x + 3)$$

अतः, दिए हुए बहुपद के शून्यक $\frac{4}{3}$ और $-\frac{3}{2}$ हैं।

दिया हुआ बहुपद $x^2 + \frac{1}{6}x - 2$ है।

शून्यकों का योग $= \frac{4}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{6} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ तथा

शून्यकों का गुणनफल $= \frac{4}{3} \times \frac{-3}{2} = -2 = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

प्रश्नावली 2.3

गुणनखंडन द्वारा निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा इन बहुपदों के गुणांकों और शून्यकों के बीच के संबंधों को सत्यापित कीजिए:

1. $4x^2 - 3x - 1$

2. $3x^2 + 4x - 4$

3. $5t^2 + 12t + 7$

4. $t^3 - 2t^2 - 15t$

5. $2x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{4}$

6. $4x^2 + 5\sqrt{2}\,x - 3$

7. $2s^2 - (1 + 2\sqrt{2})s + \sqrt{2}$

8. $v^2 + 4\sqrt{3}\,v - 15$

9. $y^2 + \frac{3}{2}\sqrt{5}\,y - 5$

10. $7y^2 - \frac{11}{3}y - \frac{2}{3}$

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: वह द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों के योग और गुणनफल क्रमशः $\sqrt{2}$ तथा $-\frac{3}{2}$ हैं। इसके शून्यक भी ज्ञात कीजिए।

हल : वह द्विघात बहुपद जिसके शून्यकों के योग और गुणनफल क्रमशः $\sqrt{2}$ और $-\frac{3}{2}$ हैं,

$x^2 - \sqrt{2}\,x - \frac{3}{2}$ है।

$$x^2 - \sqrt{2}\,x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\,[2x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 3]$$

$$= \frac{1}{2}\,[2x^2 + \sqrt{2}\,x - 3\sqrt{2}\,x - 3]$$

$$= \frac{1}{2}\,[\sqrt{2}\,x\,(\sqrt{2}\,x + 1) - 3\,(\sqrt{2}\,x + 1)]$$

$$= \frac{1}{2}\,[\sqrt{2}\,x + 1]\,[\sqrt{2}\,x - 3]$$

अतः, वाँछित शून्यक $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ और $\frac{3}{\sqrt{2}}$ हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: यदि $x^3 + 2x^2 + kx + 3$ को $x - 3$ से भाग देने पर शेषफल 21 प्राप्त होता है, तो k का मान और भागफल ज्ञात कीजिए। इसके बाद, त्रिघात बहुपद $x^3 + 2x^2 + kx - 18$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $p(x) = x^3 + 2x^2 + kx + 3$ है।

तब, $p(3) = 3^3 + 2 \times 3^2 + 3k + 3 = 21$

अर्थात् $3k = -27$

अर्थात् $k = -9$

अतः दिया हुआ बहुपद $x^3 + 2x^2 - 9x + 3$ होगा।

अब, $x - 3)\ x^3 + 2x^2 - 9x + 3\ (x^2 + 5x + 6$

$x^3 - 3x^2$

$5x^2 - 9x + 3$

$5x^2 - 15x$

$6x + 3$

$6x - 18$

21

अतः, भागफल $= x^2 + 5x + 6,$

अब, $x^3 + 2x^2 - 9x + 3 = (x^2 + 5x + 6)\,(x - 3) + 21$

अर्थात् $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x - 3)\,(x^2 + 5x + 6)$

$$= (x - 3)\,(x + 2)\,(x + 3)$$

अतः, $x^3 + 2x^2 + kx - 18$ के शून्यक 3, – 2 और – 3 हैं।

प्रश्नावली 2.4

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक में बहुपद ज्ञात कीजिए, जिनके शून्यकों के क्रमशः योग और गुणनफल दिए हुए हैं। साथ ही, गुणनखंडन द्वारा, इन बहुपदों के शून्यक भी ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-8}{3}, \frac{4}{3}$

(ii) $\frac{21}{8}, \frac{5}{16}$

(iii) $-2\sqrt{3}, -9$

(iv) $\frac{-3}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2}$

2. दिया है कि त्रिघात बहुपद $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ के शून्यक $a, a + b$ और $a + 2b$ के रूप के हैं, जहाँ a और b, कोई वास्तविक संख्याएँ हैं। a और b के मान तथा साथ ही दिए हुए बहुपद के शून्यक ज्ञात कीजिए।

3. त्रिघात बहुपद $6x^3 + \sqrt{2}\ x^2 - 10x - 4\sqrt{2}$ का एक शून्यक $\sqrt{2}$ दिया है। इसके अन्य दो शून्यक ज्ञात कीजिए।

4. k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि $x^2 + 2x + k$ बहुपद $2x^4 + x^3 - 14\,x^2 + 5x + 6$ का एक गुणनखंड हो जाए। इन दोनों बहुपदों के सभी शून्यक भी ज्ञात कीजिए।

5. त्रिघात बहुपद $x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 13x - 3\sqrt{5}$ का एक गुणनखंड $x - \sqrt{5}$ दिया है। इस बहुपद के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए।

6. a और b के किन मानों के लिए, $q(x) = x^3 + 2x^2 + a$ के शून्यक बहुपद $p(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x + b$ के भी शून्यक होंगे? $p(x)$ के कौन से शून्यक $q(x)$ के शून्यक नहीं हैं?